

## 26 高斯引理

數學家高斯在數學上有許許多多有名的定理及猜想，高斯引理是大家最耳熟能詳及常用的一個。

### 26.1 高斯引理

**定理 26.1(高斯引理)** 如果首項係數是 1 的多項式

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

整除另一個首項係數為 1 的多項式

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$$

其中  $a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$  為有理數； $c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$  為整數，則證明

$$a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$$

必須是整數。(註：這裡的整除是指所得的商是一個首項係數為 1，其它項係數為有理數的多項式)

**【證明】** 假設多項式  $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$  被多項式

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

除之，所得的商為

$$x^{n-m} + \frac{b_{n-m-1}}{b_{n-m}}x^{n-m-1} + \cdots + \frac{b_1}{b_{n-m}}x + \frac{b_0}{b_{n-m}},$$

其中

$$b_{n-m}, b_{n-m-1}, \dots, b_1, b_0$$

是最大公因數為 1 的整數。將它整理成如下的橫式

$$\begin{array}{r} x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0 \\ \times) \quad b_{n-m}x^{n-m} + b_{n-m-1}x^{n-m-1} + \cdots + b_1x + b_0 \\ \hline b_{n-m}(x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0) \end{array} \quad (26.1)$$

其次，將分數

$$a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0$$

通分，可以令

$$a_i = \frac{a'_i}{a'_m}, \quad 0 \leq i \leq m-1,$$

其中  $a'_m$  為正整數且

$$a'_m, a'_{m-1}, \cdots, a'_1, a'_0$$

亦是最大公因數為 1 的整數。將乘式(26.1)乘以  $a'_m$  得到

$$\begin{array}{r} a'_m x^m + \cdots + a'_i x^i + \cdots + a'_0 \\ \times) \quad b_{n-m} x^{n-m} + \cdots + b_j x^j + \cdots + b_0 \\ \hline a'_m b_{n-m} (x^n + \cdots + c_{i+j} x^{i+j} + \cdots + c_0) \end{array} \quad (26.2)$$

我們的目標是證明： $a'_m = 1$ 。利用反證法，假設正整數  $a'_m \neq 1$ ，因此至少有一個質因數  $p$

整除  $a'_m$ 。由

$$(a'_m, a'_{m-1}, \cdots, a'_1, a'_0) = 1$$

及

$$(b_{n-m}, b_{n-m-1}, \cdots, b_1, b_0) = 1$$

知道：可以找到整數

$$i, j (0 \leq i \leq m-1; 0 \leq j \leq n-m)$$

使得

$$\begin{cases} p | a'_0, p | a'_1; \cdots p | a'_{i-1}, p | b_0, p | b_1, \cdots, p | b_{j-1} \\ \text{但是 } p \text{ 不能整除 } a'_i \text{ 及 } b_j. \end{cases} \quad (26.3)$$

現在比較乘式(26.2)中  $x^{i+j}$  項的係數：因為  $p \mid a'_m$ ，所以乘式(26.2)下方的  $x^{i+j}$  項的係數為  $p$  的倍數；而乘式(26.2)上方的  $x^{i+j}$  項的係數為

$$\cdots + a'_{i-1} b_{j+1} + a'_i b_j + a'_{i+1} b_{j-1} + \cdots.$$

利用式子(26.3)，可以將它整理為

$$\cdots + a'_{i-1} b_{j+1} + a'_i b_j + a'_{i+1} b_{j-1} + \cdots = a'_i b_j + p \text{ 的倍數}。$$

再由式子(26.3)知道此數不是  $p$  的倍數。互相矛盾，即  $a'_m = 1$ ，所以

$$a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0$$

為整數。

## 26.2 高斯引理的應用

一個角如果可以表為  $\frac{n}{m}\pi$ （其中  $m$  為正整數， $n$  為整數）則我們稱這種角為有理角。

**定理 26.2** 如果  $m, n$  為正整數且  $\cos \frac{n}{m}\pi$  為有理數則

$$\cos \frac{n}{m}\pi = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1.$$

【證明】根據隸美佛定理知道

$$\cos \frac{n}{m}\pi + i \sin \frac{n}{m}\pi, \cos \frac{n}{m}\pi - i \sin \frac{n}{m}\pi$$

為方程式  $x^{2m} - 1 = 0$  的兩個根，所以

$$\begin{aligned} & x^2 - 2\cos \frac{n}{m}\pi x + 1 \\ &= (x - \cos \frac{n}{m}\pi + i \sin \frac{n}{m}\pi)(x - \cos \frac{n}{m}\pi - i \sin \frac{n}{m}\pi) \mid x^{2m} - 1. \end{aligned}$$

因為  $2\cos \frac{n}{m}\pi$  為有理數，所以由高斯引理知道  $2\cos \frac{n}{m}\pi$  為整數。所以我們得到

$$2\cos \frac{n}{m}\pi = -2, -1, 0, 1, 2 \Rightarrow \cos \frac{n}{m}\pi = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1.$$

又因為取特別角時，我們有

$$\cos 0\pi = 1, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi}{2} = 0, \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \cos \pi = -1.$$

所以這五個值都可能發生。

這個定理是說：在  $x$  為有理數時（除了幾組特別值之外），函數  $f(x) = \cos(x \cdot \pi)$  的值都是無理數。這是三角函數一個很重要而且奇怪的現象。

**定理 26.3** 三邊長為有理數且三內角為有理角的三角形必為正三角形。

【證明】設三角形  $\triangle ABC$  的三邊長及三內角分別為  $a, b, c$  及  $\angle A, \angle B, \angle C$ ；由餘弦定理知道  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$ ；因為  $a, b, c$  為有理數，所以  $\cos \angle A$  亦為有理數。根據定理 26.2 得

$$\cos \angle A = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1 \Rightarrow \angle A = 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ.$$

同理有

$$\begin{cases} \angle A = 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ \\ \angle B = 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ \\ \angle C = 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ.$$

因此三角形  $\triangle ABC$  為正三角形。

三角形最重要的兩個量為三邊的邊長及三個內角的角度。當三邊的邊長給定時，三內角的角度可以經由餘弦定理確定；而三內角的角度知道時，三邊的邊長比也可以經由正弦定理算出。這告訴我們，這兩個量是互相牽制的。有些人比較喜歡三邊邊長是正整數的三角形；但是也有些人比較欣賞三內角是有理角的三角形。定理 26.3 告訴我們，這兩種人共同中意的三角形就只有正三角形而已。也就是說，魚（好的邊長）與熊掌（好的內角）是不能兼得的。

習題 26.1 如果  $m, n$  為正整數且  $\sin \frac{n}{m} \pi$  為有理數，則求  $\sin \frac{n}{m} \pi$  的可能值。

習題 26.2 如果  $m, n$  為正整數且  $\tan \frac{n}{m}\pi$  為有理數，則求  $\tan \frac{n}{m}\pi$  的可能值。

習題 26.3 設  $a, b$  是互質的整數，且一次因式  $ax - b$  整除整係數多項式

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

證明：整除所得的商式也是一個整係數多項式。

習題 26.4 設  $m, n$  為正整數，且令  $\theta = \frac{n}{m}\pi$ 。

(1) 如果  $\sin \theta + \cos \theta$  為有理數，則求  $\sin \theta + \cos \theta$  的可能值。

(2) 是否有這樣的  $\theta$  滿足  $0 < \frac{n}{m} < \frac{1}{2}$  及  $\sin \theta - \cos 2\theta$  為有理數。

### 動手玩數學

下圖是一張寫有八個數字的紙張。現在沿著格子線摺數次之後，變成看起來是一個正方形大小，但是厚度卻有八張紙張厚。如果依照次序將數字寫下來會產生一個八位數的正整數。你是否可以找到好的摺疊方式，讓產生的八位數恰為 12345678。

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 7 | 4 |
| 2 | 3 | 6 | 5 |

如果要變成 12364587，可辦到嗎？

### 挑戰題

試確定所有滿足底下條件的正整數  $m$  與正整數  $n$ ：

$$\sin \frac{2\pi}{m} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n.$$

## 高斯

德國大數學家，生於 1777 年，死於 1855 年。高斯是一位天才數學家，被稱為數學王子。終其一生做了很多數學上偉大的貢獻，即使是今天的數學，仍然受高斯的影響非常深遠。高斯證明了古代有名的作圖題“正十七邊形可尺規作圖”，另外他也證明了“被八除之餘數不為七的正整數皆可表為三個整數的平方和”。事實上，在數論上，高斯有很多偉大的貢獻。

高斯提過很多有名的問題；例如是否有無窮多個質數  $p$  使得  $\frac{1}{p}$  的循環節為  $p-1$  位。 $p=7$  即是一個

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}.$$

事實上，如果“黎曼猜想”成立的話，我們可以證明這樣的質數有無窮多個。

代數上有名的代數基本定理是高斯首先給予證明的。所謂的代數基本定理是指：任意以複數為係數的多項式（次數大於零次）必有複數根存在。